# Практическая работа №3

**Цель работы:** нахождение корня уравнения методами *Ньютона*, *простых итераций, хорд*, исследование скорости сходимости и обусловленности метода.

**Основные теоретические положения.**

**Метод Ньютона.** В случае, когда известно хорошее начальное приближение решения уравнения , эффективным методом повышения точности является метод *Ньютона*. Он состоит в построении итерационной последовательности (1)

(1)

где Последовательность сходится к корню уравнения . По теореме о сходимости метода *Ньютона* должен быть простым корнем уравнения в отсекающем промежутке этого корня функция – дважды непрерывно дифференцируема и

Для оценки погрешности *n*-го приближения корня предлагается пользоваться неравенством (2)

(2)

где - наибольшее значение модуля второй производной на отрезке [a,b]; - наименьшее значение модуля первой производной на отрезке [a,b]. Таким образом, если , то . Это означает, что при хорошем начальном приближении корня после каждой итерации число верных десятичных знаков в очередном приближении удваивается, т.е. процесс сходится очень быстро и имеет место квадратическая сходимость.

Если необходимо найти корень с точностью **, то итерационный процесс можно прекращать, когда выполняется неравенство (3)

(3)

Если на *(n-1)*-м шаге очередное приближение не удовлетворяет условию окончания процесса, то вычисляются величины и следующие приближение корня . При выполнении условия (3) величина принимается за приближенное значение корня *с*, вычисленное с точностью **.

**Метод простых итераций.** Метод *простых итераций* решения уравнения заключается в замене исходного уравнения эквивалентным ему уравнением и построении последовательности , сходящейся при к точному решению

Корень уравнения является точкой пересечения двух графиков и . Сходимость метода зависит от вида функции . В зависимости от величины модуля первой производной метод может сходиться и расходиться.

Достаточные условия сходимости метода *простых итераций* формулируются следующей теоремой:

Если функция определена на отрезке , дифференцируема, то существует число, такое что на , и последовательность,сходится к единственному решению на уравнения при (1)

(1)

Если , то |, если , то |.

Рассмотрим один шаг итерационного процесса. Исходя из найденного на предыдущем шаге значения , вычисляется . Если , то полагается и выполняется очередная итерация. Если же , то вычисления заканчиваются и за приближенное значение корня принимается величина . Погрешность результата вычислений зависит от знака производной : при : погрешность определения корня составляет , а при , погрешность не превышает . Здесь - число, такое, что на отрезке [a,b]. Существование числа является условием сходимости метода в соответствии с отмеченной выше теоремой.

Для применения метода *простых итераций* определяющее значение имеет выбор функции , в уравнении , эквивалентном исходному. Функцию необходимо подбирать так, чтобы . Это обусловливается тем, что если , на отрезке [a,b], то последовательные приближения . будут колебаться около корня *c*, если же , то последовательные приближения будут сходиться к корню *c* монотонно.

Число обусловленности метода *простых итераций* (2)

**Метод хорд**

Пусть найден отрезок , на котором функция меняет знак. Для определенности положим >0, . В методе *хорд* процесс итераций состоит в том, что в качестве приближений к корню уравнения =0 принимаются значения . . . точек пересечения хорды с осью абсцисс, как это показано на рисунке 2.

с

Рисунок 2 – Построение хорд в используемом методе

Сначала находится уравнение хорды АВ (прямой, проходящей через 2 точки): . Для точки пересечения ее с осью абсцисс получается уравнение . Далее сравниваются знаки величин и и для рассматриваемого случая оказывается, что корень находится в интервале , так как . Отрезок отбрасывается. Следующая итерации состоит в определении нового приближения - точки пересечения хорды с осью абсцисс и т.д. Итерационный процесс продолжается до тех пор, пока значение не станет по модулю меньше заданного числа .

Алгоритмы методов *бисекции* и *хорд* похожи, однако метод хорд в ряде случаев дает более быструю сходимость итерационного процесса, причем успех его применения, как и метода *бисекции*, гарантирован. Метод обладает линейной сходимостью.

**Порядок выполнения работы:**

1. Нахождение области определения функции, локализация корня уравнения 𝑓(𝑥) = 0, взятие первой и второй производных вручную, нахождение их минимума и максимума.
2. Для метода Ньютона:
   1. Проверить функцию на выпуклость вверх или вниз, выбрать начальное приближение корня так чтобы.
   2. Получить аналитическое выражение функций и Получить
   3. По заданному Eps сосчитать условие окончания итерационного процесса Eps2=
3. Для метода простых итераций:
   1. Сосчитать найти на отрезке [Left, Right] – минимальное значение – максимальное значение .
   2. Преобразовать уравнение к виду, удобному для итераций .

4) Написание программы, включающей метод нахождения функции, производной на Java.

5) Вычисление , сравнение его с получение вывода об обусловленности задачи.

6) Поменять условие окончания итераций на N (большое значение) и поймать интервал неопределенности по правилу Гарвика.

7) Для каждого метода eps, который является условием остановки итераций меняем в диапазоне от 0.00001 и 0.1 и заполняем таблицу

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *eps* | *delta* |  |  |  |  | Обусловленность |
|  |  |  |  |  |  |  |

8)Сделать сравнительную таблицу, результаты Бисекции можно взять из предыдущей работы.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Метод  Характеристики | Бисекция | Ньютон | Простых итераций | Хорд |
| Многошаговый или одношаговый |  |  |  |  |
| Скорость сходимости |  |  |  |  |
| Априорная погрешность |  |  |  |  |
| Апостериорная погрешность |  |  |  |  |
| Номер итерации при начале разболтки |  |  |  |  |

**Варианты:** согласно номеру в списке, увеличены до 23.

|  |  |
| --- | --- |
| № | f(x) |
| 1 | ln(x+(x^2+5)^(1/2)) |
| 2 | (sin(2x))^3cos(8x^5) |
| 3 | arcsin(x+8)/cos(x-4) |
| 4 | [(x-5)^(2)/(ln(x-9))^(3)]-40 |
| 5 | ln(x^2-(x-5)^(1/2))-4 |
| 6 | [ln(x^(2)+4)/(x+6)]-9 |
| 7 | [ln(x-5)^(2)/ln(x)]+3 |
| 8 | (sin(2x^3))^2cos(8x) |
| 9 | ln(x+(x^3+8)^(1/2)) |
| 10 | (arcsin(x-8))^2/(cos(x-4))^3 |
| 11 | (x-5)^(2)/(ln(x-9))^(2) |
| 12 | [log5(x^(2)+4)]-1 |
| 13 | arcsin(x^(4)-8)/sin(x+4) |
| 14 | ln(x-5)^(2)/cos(x) |
| 15 | sin(2x^2)(cos(8x))^3 |
| 16 | exp(sin(x-9)) |
| 17 | arcsin(x^2-8)/(cos(x+4))^3 |
| 18 | ln((x-5)^(2))/3 |
| 19 | ln(x^2+(x^3+8)^(1/2)) |
| 20 | arcsin(x^(4)-8)/sin(x+4) |
| 21 | sin(2x^3)(cos(7x))^3 |
| 22 | arccos(x^2-3)-2 |
| 23 | tg(x^2+3)(x-5)^3 |
| 24 | ctg(x^2-8)(x+3)+3 |